

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ  
ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА, ВОЗНИКАЮЩЕГО В ГИДРОАКУСТИКЕ  
СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ  
ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Н.Ш.ИСКЕНДЕРОВ, Г.А.САЛИМОВА  
Бакинский Государственный Университет

В работе исследована одна обратная краевая задача для эволюционного уравнения четвёртого порядка, возникающего в гидроакустике стратифицированной жидкости. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности классического решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Для уравнения [1, 2]

$$\varepsilon^2 u_{iiii}(x, t) - u_{iixx}(x, t) + u_{it}(x, t) - u_{xx}(x, t) = a(t)u(x, t) + f(x, t) \quad (1)$$

в области  $D_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим обратную задачу при граничных условиях

$$u(0, t) = u_x(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2)$$

начальных условиях

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \\ u_{tt}(x, 0) = \varphi_2(x), \quad u_{iii}(x, 0) = \varphi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

и дополнительном условии

$$\int_0^1 u(x, t) dx = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

где  $0 < \varepsilon \leq 1$  - фиксированное число,  $f(x, t), \varphi_i(x)$  ( $i = \overline{0, 3}$ ),  $h(t)$  - заданные функции, а  $u(x, t)$  и  $a(t)$  - искомые функции.

**Определение.** Классическим решением задачи (1)-(4) назовём пару  $\{u(x, t), a(t)\}$  функций  $u(x, t)$  и  $a(t)$ , обладающих следующими свойствами:

- 1) функция  $u(x, t)$  непрерывна в  $D_T$  вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
  - 2) функция  $a(t)$  непрерывна на  $[0, T]$ ;
  - 3) все условия (1)-(4) удовлетворяются в обычном смысле.
- Справедлива следующая

**Лемма 1.** Пусть  $h(t) \in C^4[0, T]$ ,  $h(t) \neq 0$  при  $t \in [0, T]$ ,  $\int_0^1 \varphi_0(x) dx = h(0)$ ,

$$\int_0^1 \varphi_1(x) dx = h'(0), \int_0^1 \varphi_2(x) dx = h''(0), \int_0^1 \varphi_3(x) dx = h'''(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций  $u(x, t)$  и  $a(t)$ , обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(4), из (1)-(3) и

$$a(t)h(t) + \int_0^1 f(x, t) dx = \varepsilon^2 h^{(4)}(t) + h''(t) + u_{tt}(0, t) + u_x(0, t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (5)$$

С целью исследования задачи (1)-(3), (5), рассмотрим следующие пространства. Обозначим через  $B_{2, T}^\alpha$  [3] совокупность всех функций вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1),$$

рассматриваемых в  $D_T$ , где каждая из функций  $u_k(t)$  непрерывна на  $[0, T]$  и

$$I(u) \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^\alpha \|u_k(t)\|_{C[0, T]})^2 \right\}^{1/2} < +\infty, \quad (6)$$

причём  $\alpha \geq 0$ . Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2, T}^\alpha} = I(u).$$

Через  $E_T^\alpha$  обозначим пространство  $B_{2, T}^\alpha \times C[0, T]$  вектор-функций  $z(x, t) = \{u(x, t), a(t)\}$  с нормой

$$\|z\|_{E_T^\alpha} = \|u(x, t)\|_{B_{2, T}^\alpha} + \|a(t)\|_{C[0, T]}.$$

Известно, что  $B_{2, T}^\alpha$  и  $E_T^\alpha$  являются банаховыми пространствами.

Первую компоненту  $u(x, t)$  решения  $\{u(x, t), a(t)\}$  задачи (1)-(3), (5) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \left( \lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \right), \quad (7)$$

где  $u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$ .

Тогда, применяя схему метода Фурье, из (1) и (2), получаем:

$$\varepsilon^2 u_k^{(4)}(t) + (\lambda_k^2 + 1) u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(u, a, t) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

$$u_k(0) = \varphi_{0, k}, u_k'(0) = \varphi_{1, k}, u_k''(0) = \varphi_{2, k}, u_k'''(0) = \varphi_{3, k} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где

$$F_k(u, a; t) = a(t)u_k(t) + f_k(t), \quad f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\varphi_{i,k}(x) = 2 \int_0^1 \varphi_i(x) \sin \lambda_k x dx \quad (i = \overline{0, 3}; k = 1, 2, \dots).$$

Теперь, из (5), с учетом (7), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ \varepsilon^2 h^{(4)}(t) + h''(t) - \int_0^1 f(x, t) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u_k''(t) + u_k(t)) \right\}. \quad (10)$$

После применения метода вариации постоянного решения задачи из (8) и (9) находим [4]:

$$\begin{aligned} u_k(t) = & \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \left\{ (\beta_k^2 \cos \alpha_k t - \alpha_k^2 \cos \beta_k t) \varphi_{0,k} + \left( \frac{\beta_k^2}{\alpha_k} \sin \alpha_k t - \frac{\alpha_k^2}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_{1,k} + \right. \\ & + (\cos \alpha_k t - \cos \beta_k t) \varphi_{2,k} + \left. \left( \frac{1}{\alpha_k} \sin \alpha_k t - \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_{3,k} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t F_k(u, a; \tau) \left( \frac{1}{\alpha_k} \sin \alpha_k(t - \tau) - \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k(t - \tau) \right) d\tau \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\lambda_k^2 + 1 - \sqrt{(\lambda_k^2 + 1)^2 - 4\varepsilon^2 \lambda_k^2}}{2}}, \quad \beta_k = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\lambda_k^2 + 1 + \sqrt{(\lambda_k^2 + 1)^2 - 4\varepsilon^2 \lambda_k^2}}{2}}.$$

Подставляя  $u_k(t)$  из (11) в представление (7), получаем:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \left[ (\beta_k^2 \cos \alpha_k t - \alpha_k^2 \cos \beta_k t) \varphi_{0,k} + \left( \frac{\beta_k^2}{\alpha_k} \sin \alpha_k t - \frac{\alpha_k^2}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_{1,k} + \right. \right. \\ & + (\cos \alpha_k t - \cos \beta_k t) \varphi_{2,k} + \left. \left( \frac{1}{\alpha_k} \sin \alpha_k t - \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_{3,k} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t F_k(u, a; \tau) \left( \frac{1}{\alpha_k} \sin \alpha_k(t - \tau) - \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k(t - \tau) \right) d\tau \right] \sin \lambda_k x. \quad (12) \right. \end{aligned}$$

Теперь из (11) имеем:

$$\begin{aligned} u_k'(t) = & \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \left\{ (-\alpha_k \beta_k^2 \sin \alpha_k t + \alpha_k^2 \beta_k \sin \beta_k t) \varphi_{0,k} + (\beta_k^2 \cos \alpha_k t - \alpha_k^2 \cos \beta_k t) \varphi_{1,k} + \right. \\ & + (-\alpha_k \sin \alpha_k t + \beta_k \sin \beta_k t) \varphi_{2,k} + (\cos \alpha_k t - \cos \beta_k t) \varphi_{3,k} \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t F_k(u, a; \tau) \cos \alpha_k(t - \tau) - \cos \beta_k(t - \tau) d\tau \right\}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$u_k''(t) = \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \left\{ (-\alpha_k^2 \beta_k^2 \cos \alpha_k t + \alpha_k^2 \beta_k^2 \cos \beta_k t) \varphi_{0,k} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (-\beta_k^2 \alpha_k \sin \alpha_k t + \alpha_k^2 \beta_k \sin \beta_k t) \varphi_{1,k} + (-\alpha_k^2 \cos \alpha_k t + \beta_k^2 \cos \beta_k t) \varphi_{2,k} + \\
& + (-\alpha_k \sin \alpha_k t + \beta_k \sin \beta_k t) \varphi_{3,k} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t F_k(u, a; \tau) (-\alpha_k \sin \alpha_k (t-\tau) + \beta_k \sin \beta_k (t-\tau)) d\tau \Big\}, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_k'''(t) = & \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \{ (\alpha_k^3 \beta_k^2 \sin \alpha_k t - \alpha_k^2 \beta_k^3 \sin \beta_k t) \varphi_{0,k} + \\
& + (-\alpha_k^2 \beta_k^2 \cos \alpha_k t + \beta_k^2 \alpha_k^2 \cos \beta_k t) \varphi_{1,2k} + (\alpha_k^3 \sin \alpha_k t - \beta_k^3 \sin \beta_k t) \varphi_{2,k} + \\
& + (-\alpha_k^2 \cos \alpha_k t + \beta_k^2 \cos \beta_k t) \varphi_{3,k} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t F_k(u, a; \tau) (-\alpha_k^2 \cos \beta_k (t-\tau) + \beta_k^2 \cos \alpha_k (t-\tau)) d\tau \Big\}, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_k^{(4)}(t) = & \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \{ (\alpha_k^4 \beta_k^2 \cos \alpha_k t - \alpha_k^2 \beta_k^4 \cos \beta_k t) \varphi_{0,k} + \\
& + (\alpha_k^3 \beta_k^2 \sin \alpha_k t - \alpha_k^2 \beta_k^3 \sin \beta_k t) \varphi_{1,k} + (\alpha_k^4 \cos \alpha_k t - \beta_k^4 \cos \beta_k t) \varphi_{2,k} + \\
& + (\alpha_k^3 \sin \alpha_k t - \beta_k^3 \sin \beta_k t) \varphi_{3,k} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t F_k(u, a; \tau) (-\alpha_k^3 \sin \alpha_k (t-\tau) + \beta_k^3 \sin \beta_k (t-\tau)) d\tau \Big\} + \frac{1}{\varepsilon^2} F_k(u, a, t). \quad (16)
\end{aligned}$$

Далее, из (11) и (14) видно, что

$$\begin{aligned}
v_k(t) \equiv u_k''(t) + u_k(t) = & \frac{1}{\beta_k^2 - \alpha_k^2} \left\{ \left[ \beta_k^2 (1 - \alpha_k^2) \cos \alpha_k t - \alpha_k^2 (1 - \beta_k^2) \cos \beta_k t \right] \varphi_{0,k} + \right. \\
& + \left[ \beta_k^2 \left( \frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k \right) \sin \alpha_k t - \alpha_k^2 \left( \frac{1}{\beta_k} - \beta_k \right) \sin \beta_k t \right] \varphi_{1,k} + \\
& + \left[ (1 - \alpha_k^2) \cos \alpha_k t - (1 - \beta_k^2) \cos \beta_k t \right] \varphi_{2,k} + \\
& + \left[ \left( \frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k \right) \sin \alpha_k t - \left( \frac{1}{\beta_k} - \beta_k \right) \sin \beta_k t \right] \varphi_{3,k} + \\
& \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t F_k(\tau, u, a) \left[ \left( \frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k \right) \sin \alpha_k (t-\tau) - \left( \frac{1}{\beta_k} - \beta_k \right) \sin \beta_k (t-\tau) \right] d\tau \right\}. \quad (17)
\end{aligned}$$

После подстановки выражения  $v_k(t) \equiv u_k''(t) + u_k(t)$  из (17) в (10), для определения второй компоненты  $a(t)$  решения задачи (1)-(3), (5) находим:

$$\begin{aligned}
a(t) = & h^{-1}(t) \left\{ \varepsilon^2 h^{(4)}(t) + h''(t) - \int_0^1 f(x,t) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k(t) \right\} = h^{-1}(t) \{ \varepsilon^2 h^{(4)}(t) + \\
& + h''(t) - \int_0^1 f(x,t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left[ \beta_k^2 (1 - \alpha_k^2) \cos \alpha_k t - \alpha_k^2 (1 - \beta_k^2) \cos \beta_k t \right] \varphi_{0,k} + \\
& + \left[ \beta_k^2 \left( \frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k \right) \sin \alpha_k t - \alpha_k^2 \left( \frac{1}{\beta_k} - \beta_k \right) \sin \beta_k t \right] \varphi_{1,k} + \\
& + \left[ (1 - \alpha_k^2) \cos \alpha_k t - (1 - \beta_k^2) \cos \beta_k t \right] \varphi_{2,k} + \\
& + \left[ \left( \frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k \right) \sin \alpha_k t - \left( \frac{1}{\beta_k} - \beta_k \right) \sin \beta_k t \right] \varphi_{3,k} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t F_k(\tau, u, a) \left[ \left( \frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k \right) \sin \alpha_k (t - \tau) - \left( \frac{1}{\beta_k} - \beta_k \right) \sin \beta_k (t - \tau) \right] d\tau. \quad (18)
\end{aligned}$$

Исходя из определения решения задачи (1)-(3), (5) доказывается следующая

**Лемма 2.** Если  $\{u(x,t), a(t)\}$  - любое решение задачи (1)-(3), (5), то функции

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют на  $[0, T]$  системе (11).

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1.  $\varphi_i(x) \in C^2[0,1]$ ,  $\varphi_i'''(x) \in L_2(0,1)$  и  $\varphi_i(0) = \varphi_i'(1) = \varphi_i''(0) = 0$  ( $i=0,1,2$ ).
2.  $\varphi_3(x) \in C^1[0,1]$ ,  $\varphi_3''(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\varphi_3(0) = \varphi_3'(1) = 0$ .
3.  $f(x,t) \in C_{x,t}^{1,0}(D_T)$ ,  $f_{xx}(x,t) \in L_2(D_T)$ ,  $f(0,t) = f_x(1,t) = 0$  ( $0 \leq t \leq T$ ).
4.  $h(t) \in C^4[0,T]$ ,  $h(t) \neq 0$  при  $t \in [0,T]$ .

Тогда из (19)- (24), соответственно, имеем:

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{1/2} \leq & (\varepsilon^2 + 4) \sqrt{10} \|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + (\varepsilon^3 + 8) \sqrt{5} \|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
& + 4\varepsilon^2 \sqrt{5} \|\varphi_2'(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\varepsilon^2 (2 + \varepsilon) \sqrt{5} \|\varphi_3'(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
& + 2(2 + \varepsilon) \sqrt{5} \sqrt{T} \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{L_2(D)}, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^3 \|u_k'(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{1/2} \leq & (2 + \varepsilon) \sqrt{10} \|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + (\varepsilon^2 + 4) \sqrt{5} \|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
& + \varepsilon(\varepsilon + 2) \sqrt{5} \|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + 4\varepsilon^2 \sqrt{5} \|\varphi_3'(x)\|_{L_2(0,1)} +
\end{aligned}$$

$$+ 4\sqrt{5}\sqrt{T}\|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{L_2(D_t)}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^3 \|u_k''(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{1/2} &\leq 4\sqrt{5}\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)} + (\varepsilon + 2)\sqrt{10}\|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ (\varepsilon^2 + 4)\sqrt{5}\|\varphi_2'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \varepsilon(\varepsilon + 2)\sqrt{10}\|\varphi_3'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon + 2)\sqrt{10}\sqrt{T}\|a(t)u_{xx}(x,t) + f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_t)}, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k \|u_k'''(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{1/2} &\leq \left( 1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) \sqrt{10}\|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + 4\sqrt{5}\|\varphi_1'(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \left( \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{\varepsilon} \right) \sqrt{5}\|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + (\varepsilon^2 + 4)\sqrt{5}\|\varphi_3'(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon^2 + 4)\sqrt{5}\sqrt{T}\|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{L_2(D_t)}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k \|u_k^{(4)}(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{1/2} &\leq \left( 1 + \frac{4}{\varepsilon^2} \right) \sqrt{6}\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ 2\left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} \right) \sqrt{6}\|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + \left( \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{8}{\varepsilon^2} \right) \sqrt{6}\|\varphi_2'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \varepsilon^2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{\varepsilon^3} \right) \sqrt{6}\|\varphi_3''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{\varepsilon^3} \right) \sqrt{6}\sqrt{T}\|a(t)u_{xx}(x,t) + f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_t)} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} \sqrt{6}\| \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)}, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left( \lambda_k^2 \|v_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right)^{1/2} &\leq (8 + \varepsilon^2)\sqrt{5}\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ (\varepsilon^3 + \sqrt{2} + 2\varepsilon) + \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon}\sqrt{5}\|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + (5\varepsilon^2 + 4)\sqrt{5}\|\varphi_2'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ (2\varepsilon^3 + (4 + \sqrt{2})\varepsilon^2 + 2\sqrt{2})\sqrt{5}\|\varphi_3''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \sqrt{5}\left( 4 + \sqrt{2} + 2\varepsilon + \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \right) \sqrt{T}\|a(t)u_{xx}(x,t) + f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_t)}. \quad (24) \end{aligned}$$

Далее, из (19) находим:

$$\|u(x,t)\|_{B_{3,T}^3} \leq A_1(T) + B_1(T)\|a(t)\|_{C(0,T)}\|u(x,t)\|_{B_{3,T}^3}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
A_1(T) &= (\varepsilon^2 + 4)\sqrt{10}\|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + (\varepsilon^3 + 8)\sqrt{5}\|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
&+ 4\varepsilon^2\sqrt{5}\|\varphi_2'(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\varepsilon^2(2 + \varepsilon)\sqrt{5}\|\varphi_3'(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
&+ 2(2 + \varepsilon)\sqrt{10T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad B_1(T) = 2(2 + \varepsilon)\sqrt{10T}.
\end{aligned}$$

Теперь из (18), с учетом (24), имеем:

$$\|a(t)\|_{C(0,T)} \leq A_2(T) + B_2(T)\|a(t)\|_{C(0,T)}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}
A_2(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|\varepsilon^2 h^{(4)}(t)\|_{C[0,T]} + \|h''(t)\|_{C[0,T]} + \left\| \int_0^1 f(x,y) dx \right\|_{C[0,T]} + \right. \\
&+ \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_k^{-2} \right)^{1/2} \left[ (8 + \varepsilon^2)\sqrt{5}\|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)} + (\varepsilon^3 + \sqrt{2}\varepsilon + 4 + \sqrt{2})\sqrt{5}\|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\
&+ (5\varepsilon^2 + 4)\sqrt{5}\|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)} + (2\varepsilon^3 + (4 + \sqrt{2})\varepsilon^2 + 2\sqrt{2})\sqrt{5}\|\varphi_3''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\
&\left. \left. + \left( 4 + \sqrt{2} + 2\varepsilon + \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \right) \sqrt{10T} \|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right] \right\}, \\
B_2(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \cdot \left( 4 + \sqrt{2} + 2\varepsilon + \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \right) \sqrt{10T}.
\end{aligned}$$

Из неравенств (25) и (26) заключаем:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (27)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 1-4 и

$$B(T)(A(T) + 2)^2 < 1. \quad (28)$$

Тогда задача (1)-(3), (5) имеет в шаре  $K = K_R \left( \|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2 \right)$  из

$E_T^3$  единственное решение.

**Доказательство.** В пространстве  $E_T^3$  рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (29)$$

где  $z = \{u, a\}$ , компоненты  $\Phi_i(u, a)$  ( $i = 1, 2$ ) оператора  $\Phi(u, a)$  определены правыми частями уравнений (12), (18), соответственно.

Рассмотрим оператор  $\Phi(u, a)$  в шаре  $K = K_R$  из  $E_T^3$ . Аналогично (27) получаем, что для любых  $z = \{u, a\}, z_1 = \{u_1, a_1\}, z_2 = \{u_2, a_2\} \in K_R$  справедливы оценки.

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (30)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leq 2B(T)R\left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\right) \quad (31)$$

Тогда из оценок (30) и (31), с учётом (28), следует, что оператор  $\Phi$  действует в шаре  $K = K_R$  и является сжимающим. Поэтому, в шаре  $K_R$  оператор  $\Phi$  имеет единственную неподвижную точку  $\{u, a\}$ , которая является решением уравнения (29).

Функция  $u(x, t)$ , как элемент пространства  $B_{2,T}^3$ , непрерывна и имеет непрерывные производные  $u_x(x, t), u_{xx}(x, t)$ .

Из неравенств (20)-(23) следует, что  $u_t(x, t), u_{tx}(x, t), u_{txx}(x, t), u_{tt}(x, t), u_{ttt}(x, t), u_{tttt}(x, t), u_{tttt}(x, t), u_{tttt}(x, t)$  непрерывны в  $D_T$ . Далее, легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3), (5) удовлетворяются в обычном смысле. Значит,  $\{u(x, t), a(t)\} \in E_T^3$  является решением задачи (1)-(3), (5). А в силу леммы 2, это решение единственно в шаре. Теорема доказана.

Таким образом, в силу леммы 1, справедлива следующая

**Теорема 2.** Пусть выполнены все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 \varphi_0(x) dx = h(0), \quad \int_0^1 \varphi_1(x) dx = h'(0), \quad \int_0^1 \varphi_2(x) dx = h''(0), \quad \int_0^1 \varphi_3(x) dx = h'''(0).$$

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре  $K = K_R$  ( $\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2$ ) из  $E_T^3$  единственное классическое решение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Габов С.А., Малышева Г.Ю., Свешников А.Г. Об одном уравнении составного типа, связанном с колебаниями сжимаемой стратифицированной жидкости. Дифференциальные уравнения, 1983, т. 19, №7, с. 1171-1180.
2. Габов С.А., Оразов Б.Б., Свешников А.Г. Об одном эволюционном уравнении четвёртого порядка, возникающем в гидроакустике стратифицированной жидкости. Дифференциальные уравнения, 1986, т. 22, № 1, с. 19-25.
3. Xudaverdiyev K.İ. Qeyri-xətti hiperbolik tənlik üçün qoyulmuş çoxölçülü qarışıq məsələ. Bakı, ADU nəşriyyatı, 1987, 88 s.
4. Salimova G.A. On a boundary value problem for a fourth order partial differential equation. AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun əsərləri, XXV c., Elm, 2006, s. 125-138.

#### HİDROAKUSTİKADA LAYLAŞDIRILMIŞ MAYEDƏ YARANAN DÖRDTƏRTİBLİ EVOLYUSİYA TƏNLİYİ ÜÇÜN İNTEQRAL ƏLAVƏ ŞƏRTLİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

N.Ş.İSGƏNDƏROV, G.A.SƏLİMOVA

#### XÜLASƏ

İşdə hidroakustikada laylaşdırılmış mayedə meydana çıxan dördtərtibli evolyusiya tənliyi üçün bir tərs sərhəd məsələsi tədqiq edilir. Əvvəlcə verilmiş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir və bu məsələnin klassik həllinin varlığı və

yeganəliyi haqqında teorem isbat edilir. Sonra bu faktdan istifadə edərək qoyulmuş məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi isbat edilir.

**AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER  
EVOLUTIONARY EQUATION ARISING IN HYDROACOUSTICS  
OF STRATIFIED LIQUID**

**N.Sh.ISGENDEROV, G.A.SALIMOVA**

**SUMMARY**

The work deals with an inverse boundary problem for a fourth order evolutionary equation arising in hydro acoustics of stratified liquid. At first the initial problem is reduced to an equivalent problem for which a theorem on the existence and uniqueness of the classic solution is proved. Further, using these facts, we prove the existence and uniqueness of the classic solution of the initial problem.